ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1980

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

***

I

On donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, un point $t_0 \in I$, deux fonctions numériques A et B définies et de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 0)$ sur I, et un réel x_0. On définit une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions numériques sur I par les relations, valables pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_0(t) = x_0 , \quad F_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) \cos F_n(\tau) + B(\tau) \sin F_n(\tau)] \, d\tau .$$

1. a) Montrer que pour tout intervalle compact $J \subset I$ tel que t_0 appartienne à J, il existe une constante K réelle vérifiant, pour tout $t \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|F_{n+2}(t) - F_{n+1}(t)\right| \leqslant K \left| \int_{t_0}^{t} \left|F_{n+1}(\tau) - F_n(\tau)\right| d\tau \right| .$$

et

$$\left|F_{n+1}(t) - F_n(t)\right| \leqslant K^{n+1} \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

b) En déduire que, pour tout $t \in I$, la suite $(F_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $F(t)$, que cette convergence est uniforme sur tout intervalle compact $J \subset I$, et que la fonction numérique F ainsi définie sur I vérifie, pour tout $t \in I$, la relation

$$F(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) \cos F(\tau) + B(\tau) \sin F(\tau)] \, d\tau .$$

c) Etablir que F est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I.

2 - Soient x_1 et x_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle

$$E : x' = A(t) \cos x + B(t) \sin x .$$

Montrer que l'ensemble des points $t \in I$ tels que $x_1(t) = x_2(t)$ est à la fois fermé et ouvert dans l'intervalle I. En admettant que les seules parties fermées et ouvertes de I sont I lui-même et la partie vide, caractériser la fonction F à l'aide de l'équation E.

.../...

II

On se propose, dans les parties II et III, d'étudier dans un espace affine euclidien réel $\mathcal{E}$ les arcs géométriques G de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) auxquels on peut associer un couple (ℓ, c) de réels strictement positifs et tels que tout arc de longueur ℓ de G soit sous-tendu par une corde de longueur $2c$. *On appellera désormais* (ℓ, c) - arc *un tel arc géométrique* G.

La présente partie II, indépendante de la partie I, est consacrée à des exemples et à l'étude de conditions nécessaires vérifiées par les (ℓ, c) - arcs.

1 - On se donne un réel $c > 0$ et on définit, dans un espace affine euclidien réel de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé, un arc paramétré Γ par les formules

$$x = \cos 2t + (\frac{1}{2} + \cos^2 t)\, c \sin t \ , \quad y = \sin 2t - c \cos^3 t \ , \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} c \sin t \ ,$$

où t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) Quelle est la courbe décrite par le milieu $M(t)$ des deux points $P(t)$ et $P(t+\pi)$ de Γ, de paramètres respectifs t et $t+\pi$ ($t \in [0, \pi]$) ?

b) Comparer les directions des vecteurs $\frac{d}{dt}[\overrightarrow{P(t)\,P(t+\pi)}]$ et $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t)$ et montrer, sans chercher à construire le support de Γ ni à calculer sa longueur L, que l'arc géométrique G associé à Γ est un $(\frac{L}{2}, c)$ - arc.

2 - *Dans toute la suite du problème, on se place dans un* plan *affine euclidien réel* $\mathcal{E}$ *rapporté à un repère orthonormé.*

On considère dans $\mathcal{E}$ l'arc paramétré Γ

$$t \in \mathbb{R} \ , \qquad t \longmapsto \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif donné.

a) Construire la courbe ainsi définie.

b) A tout point M de paramètre t de cette courbe on associe le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\cos\frac{3t}{2}$, $\sin\frac{3t}{2}$, et les deux points P et Q de $\mathcal{E}$ définis par $\overrightarrow{MP} = -c\vec{u}$, $\overrightarrow{MQ} = c\vec{u}$, où c est un réel strictement positif fixé. Vérifier que $\vec{u}$ est tangent à Γ. Montrer que P et Q décrivent une même courbe C lorsque t décrit $\mathbb{R}$ et dessiner schématiquement sur une même figure la courbe C et le support de Γ (on choisira, *uniquement pour ce dessin,* $c = 2a\sqrt{2}$ et $a = 2$, en prenant le centimètre pour unité de longueur).

c) Etablir l'existence d'un réel $\ell > 0$, dont on ne demande pas le calcul explicite, tel que la courbe C soit le support d'un (ℓ, c) - arc.

.../...

3 - Soit G un (ℓ, c)-arc régulier. Pour tout point P d'abscisse curviligne s sur G, on considère, s'il existe, le point Q d'abscisse curviligne $s + \ell$ sur G et le milieu M de PQ.

a) On suppose que $\frac{\overrightarrow{dP}}{ds}$ est différent de $\frac{\overrightarrow{dQ}}{ds}$. Montrer que le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Comment sont situées par rapport à la droite PQ les directions des tangentes à G en P et en Q ?

b) On fait, dans cette question, l'hypothèse supplémentaire suivante : le support de G est fermé, de longueur 2ℓ, et on paramètre G sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'une abscisse curviligne, c'est-à-dire que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $P(s + 2\ell) = P(s)$. En notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite PQ orientée par $\overrightarrow{PQ}$, on définit les points P' et Q' de $\mathcal{E}$ par $\overrightarrow{MP'} = -c'\vec{u}$, $\overrightarrow{MQ'} = c'\vec{u}$, où c' est une constante réelle strictement positive. Montrer que P' et Q' décrivent un même arc géométrique G' de classe $\mathcal{C}^k$ et qu'il existe un réel $\ell' > 0$ tel que G' soit un (ℓ', c')-arc.

4 - Soit $\ell_1 > 0$ un réel fixé. Déterminer les arcs géométriques G de classe $\mathcal{C}^1$ pour lesquels, pour tout $\ell \in]0, \ell_1]$, il existe un réel $c > 0$ tel que G soit un (ℓ, c)-arc régulier vérifiant en tout point P la condition donnée en II,3,a.

III

Cette troisième partie décrit un mode de construction de (ℓ, c)-arcs. Tous les supports des arcs géométriques envisagés désormais seront situés dans un plan affine euclidien réel *orienté* $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1 - Soient $c > 0$ un réel, C_1 un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ et de support dans $\mathcal{E}$, et $f_1 : I \longrightarrow \mathcal{E}$ un paramétrage admissible de C_1 par l'intervalle I de $\mathbb{R}$. A tout point P de C_1, de paramètre t, on associe le point Q de $\mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{PQ} = 2c\vec{u}(t)$ où $\vec{u}(t)$ est le vecteur unitaire vérifiant $(\vec{i}, \vec{u}(t)) = \varphi(t)$, et φ une fonction numérique donnée, définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ; on suppose de plus qu'il n'existe aucun sous-intervalle de longueur non nulle de I sur lequel φ soit constante.

a) Vérifier que le point Q décrit un arc C_2 de classe $\mathcal{C}^k$.

b) Soient s (resp. σ) une abscisse curviligne de P sur C_1 (resp. de Q sur C_2), $\vec{u}_0$ un vecteur unitaire de $\mathcal{E}$, $P_0 = f_1(t_0)$ un point de C_1 donnés, et Q_0 le point de $\mathcal{E}$ défini par $\overrightarrow{P_0Q_0} = 2c\vec{u}_0$. Montrer qu'il existe au plus une fonction φ vérifiant les conditions précédentes et telle qu'en outre,

$$\varphi(t_0) = (\vec{i}, \vec{u}_0) \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 .$$

.../...

c) On suppose désormais que l'arc C_1 est orienté, d'origine $P_0 = f_1(t_0)$, et que les conditions assurant l'existence de φ sont remplies. Montrer que l'arc C_2 ne dépend pas du paramétrage admissible choisi pour l'arc orienté C_1.

Dans tout ce qui suit, l'arc C_2 sera orienté en lui attribuant l'origine Q_0 et sera appelé le c-transformé d'origine Q_0 *de l'arc C_1.*

d) Quel est le c-transformé d'origine P_0 de l'arc C_2 ?

2 - L'arc orienté C_2 est, comme ci-dessus, le c-transformé d'origine Q_0 de l'arc orienté C_1. Dans quel cas le vecteur $\vec{u}(t)$ est-il, en outre, pour tout $t \in I$, normal à C_1 au point P de paramètre t ?

3 - Dans cette question, l'intervalle I sur lequel est défini le paramétrage admissible f_1 de l'arc orienté C_1 est le segment $[0, 1]$. Le point $P_1 = f_1(1)$ est supposé différent de $P_0 = f_1(0)$, et on choisit pour c la moitié de la distance de P_0 à P_1. On suppose enfin que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un c-transformé C_{n+1} d'origine P_n de l'arc orienté C_n, où P_{n-1} et P_n désignent respectivement l'origine et l'extrémité de C_n.

a) Montrer que si les deux vecteurs $\frac{\overrightarrow{df_1}}{dt}(0)$ et $\frac{\overrightarrow{df_1}}{dt}(1)$ sont symétriques par rapport à la droite support de $P_0 P_1$, il existe un paramétrage

$$f_n : [n-1, n] \longrightarrow \mathcal{E}$$

de C_n tel que la fonction f de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{E}$ définie par ses restrictions f_n soit de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Montrer que l'arc géométrique défini par $[0, +\infty[$ et f est un (ℓ, c)-arc pour un réel $\ell > 0$ convenable.

c) Etablir inversement que tout (ℓ, c)-arc G de classe $\mathcal{C}^1$, régulier, orienté d'origine P_0, de longueur infinie et vérifiant en tout point la condition de la question II,3,a. peut être obtenu par la construction précédente.

❧❧ ❧❧

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail